

Abbozzo di una Teoria generalizzata della relatività e di una Teoria della gravitazione*

I. PARTE FISICA
di Albert Einstein
a Zurigo

II. PARTE MATEMATICA
di Marcel Grossmann
a Zurigo

I.
Parte Fisica.
di ALBERT EINSTEIN

La teoria esposta a seguire è risultata dalla convinzione che la proporzionalità tra la massa inerziale e quella gravitazionale dei corpi sia una legge della natura esattamente valida che debba trovare un'espressione già nel fondamento della fisica teorica. Già in qualche lavoro precedente¹⁾ cercai di dare espressione a questa convinzione cercando di ricondurre la massa gravitazionale a quella inerziale; questo sforzo mi condusse all'ipotesi che un campo gravitazionale (infinitamente poco esteso e omogeneo) può essere fisicamente completamente sostituito da uno stato di accelerazione del sistema di riferimento. Questa ipotesi si può enunciare in modo chiaro così: Un osservatore rinchiuso in una cassa non può in alcun modo stabilire se la cassa si trovi a riposo in un campo gravitazionale statico o se la scatola si trovi in uno spazio privo di campo gravitazionale in movimento accelerato, che viene mantenuto da forze agenti sulla cassa (ipotesi di equivalenza).

Che la legge di proporzionalità della massa inerziale e di quella gravitazionale è soddisfatta in ogni caso con esattezza straordinaria, lo sappiamo da una investigazione importante e fondamentale di Eötvös²⁾, che poggia sul seguente

*Titolo originale: *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*. Pubblicato in: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **62** (1913): 225–244, 245–261. Tradotto da Oliver F. Piattella.

¹A. Einstein, Ann. d. Physik 4. 35. pag. 898; 4. 38. pag. 355; 4. 38. pag. 443

²B. Eötvös, Resoconti matematici e naturalistici dall'Ungheria VIII 1890. Wiedemann, supplemento XV. pag. 688 (1891).

raziocinio. Su di un corpo a riposo sulla superficie terrestre agisce così come il peso anche la forza centrifuga derivante dalla rotazione della Terra. La prima di queste forze è proporzionale alla massa gravitazionale, la seconda alla massa inerziale. La direzione della risultante di queste due forze, cioè la direzione della forza gravitazionale apparente (la direzione di un peso a piombo) dovrebbe dunque dipendere dalla natura fisica del corpo preso in considerazione, qualora la proporzionalità della massa inerziale e di quella gravitazionale non fosse soddisfatta. Quindi in generale le forze gravitazionali apparenti, che agiscono su parti di un sistema rigido eterogeneo, non coincidono con un'unica risultante; rimane anzi in generale un momento torcente delle forze gravitazionali apparenti che, appendendo il sistema ad un filo senza torsione, avrebbe dovuto manifestarsi. Avendo Eötvös stabilito con grande cura l'assenza di tale momento torcente, egli mostrò che il rapporto delle due masse per i corpi da lui studiati era indipendente dalla natura del corpo con tale esattezza che la differenza relativa che questo rapporto ancora potrebbe avere da materiale a materiale, dovrebbe essere più piccola di uno su venti milioni.

Durante il decadimento di materiali radioattivi vengono rilasciate quantità di energia così importanti che la variazione della massa inerziale del sistema, che corrisponde secondo la teoria della relatività a quella diminuzione di energia, non è molto piccola rispetto alla massa totale.³⁾ Nel decadimento del Radio, per esempio, quella diminuzione corrisponde a 1/10000 della massa totale. Se a quelle diminuzioni della massa inerziale non corrispondessero variazioni della massa gravitazionale, allora dovrebbero esistere differenze della massa inerziale da quella gravitazionale molto più grandi di quelle ammesse dall'esperimento di Eötvös. Si deve dunque considerare come molto probabile che l'identità della massa inerziale e di quella gravitazionale sia esattamente soddisfatta. Su queste basi mi sembra che anche l'ipotesi di equivalenza, che esprime l'identica essenza fisica della massa gravitazionale con quella inerziale, possieda un alto grado di verosimiglianza.⁴⁾

§ 1. Equazioni del movimento del punto materiale nel campo gravitazionale omogeneo.

Secondo la usuale teoria della relatività⁵⁾ un punto in movimento in assenza di forze si muove secondo l'equazione:

$$\delta \left\{ \int ds \right\} = \delta \left\{ \int \sqrt{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2} \right\} = 0 \quad (1)$$

Quindi questa equazione non indica nient'altro che il punto materiale si muove in linea retta e uniformemente. Questa è l'equazione del movimento nella forma del principio di Hamilton; quindi possiamo anche porre

$$\delta \left\{ \int H dt \right\} = 0, \quad (1a)$$

³La diminuzione di massa inerziale che corrisponde all'energia E è, com'è noto, E/c^2 , se con c viene indicata la velocità della luce.

⁴Si veda anche il § 7 di questo lavoro.

⁵Si veda M. Planck, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 1906. pag. 136.

dove è posto

$$H = -\frac{ds}{dt}m$$

se m rappresenta la massa di riposo del punto materiale. Da qui si ottengono nel solito modo il momento J_x , J_y , J_z e l'energia E del punto in movimento:

$$\begin{cases} J_x = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = m \frac{\dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}}; \text{ etc.} \\ E = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \dot{z}} \dot{z} - H = m \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - q^2}}. \end{cases} \quad (2)$$

Questo modo di rappresentare si distingue da quello solito solamente per il fatto che in quest'ultimo J_x , J_y , J_z e E presentano un ulteriore fattore c . Siccome però c è costante nella usuale teoria della relatività, il sistema qui dato è quindi equivalente a quello solitamente dato. L'unica differenza è che J e E possiedono dimensioni diverse da quelle della rappresentazione usuale.

In lavori precedenti ho mostrato che l'ipotesi di equivalenza conduce alla conseguenza che in un campo gravitazionale statico la velocità della luce c dipende dal potenziale gravitazionale. Giunsi così all'opinione che la teoria usuale della relatività fornisce solamente un'approssimazione della realtà; essa dovrebbe valere nel caso limite in cui nella regione spazio-temporale in considerazione non si presentano differenze del potenziale gravitazionale troppo grosse. Inoltre trovai come equazioni del movimento di un punto massivo in un campo gravitazionale statico nuovamente le equazioni (1) o (1a); qui però c non si deve interpretare come una costante, ma come funzione delle coordinate spaziali, che rappresenta una misura del potenziale gravitazionale. Dalla (1a) seguono nel solito modo le equazioni del movimento

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m\dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}} \right\} = -\frac{mc \frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{c^2 - q^2}} \quad (3)$$

Si vede che la quantità di moto viene rappresentata dalla stessa espressione di sopra. Le equazioni (2) valgono in modo particolare per il punto materiale in movimento nel campo gravitazionale statico. Il membro a destra della (3) rappresenta la forza esercitata sul punto massivo dal campo gravitazionale. Per il caso speciale di riposo ($q = 0$) questa è:

$$\mathfrak{K}_x = -m \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Da qui si riconosce che c svolge il ruolo del potenziale gravitazionale.

Dalla (2) segue, per un punto in movimento lento

$$\begin{cases} J_x = \frac{m\dot{x}}{c}, \\ E - mc^2 = \frac{1}{2} \frac{mq^2}{c}. \end{cases} \quad (4)$$

Per una data velocità il momento e l'energia cinetica sono quindi inversamente proporzionali alla grandezza c ; espresso in un altro modo: la massa inerziale, così come entra nel momento e nell'energia, è $\frac{m}{c}$, dove m rappresenta una costante

indipendente dal campo gravitazionale e caratteristica del punto. Ciò combina con l'ardita idea di Mach, secondo cui l'inerzia ha la sua origine in una interazione del punto massivo considerato con tutto il resto; quindi se ammuochiamo masse in prossimità del punto massivo, riduciamo quindi il potenziale gravitazionale c , aumentando dunque la grandezza $\frac{m}{c}$ rilevante per l'inerzia.

§ 2. Equazioni per il movimento del punto materiale in un campo gravitazionale arbitrario. Caratterizzazione di quest'ultimo.

Con l'introduzione di una variazione spaziale della quantità c abbiamo rotto l'intelaiatura della teoria al momento chiamata di "Teoria della Relatività"; difatti ora l'espressione denotata con ds non si comporta più come invariante sotto trasformazioni ortogonali lineari delle coordinate. Dunque — e di ciò non si deve dubitare — il principio di relatività deve essere mantenuto e così dobbiamo generalizzare la teoria della relatività di forma tale che essa contenga come caso speciale la teoria del campo gravitazionale statico accennata prima nei suoi elementi fondamentali.

Introducendo un nuovo sistema spazio-temporale $K'(x', y', z', t')$ attraverso una qualunque sostituzione:

$$\begin{aligned}x' &= x'(x, y, z, t) , \\y' &= y'(x, y, z, t) , \\z' &= z'(x, y, z, t) , \\t' &= t'(x, y, z, t) ,\end{aligned}$$

e se il campo gravitazionale nel sistema originario K era statico, allora l'equazione (1) diventa un'equazione della forma

$$\delta \left\{ \int ds' \right\} = 0 ,$$

dove è posto

$$ds'^2 = g_{11}dx'^2 + g_{22}dy'^2 + \dots + 2g_{12}dx'dy' + \dots$$

e le grandezze $g_{\mu\nu}$ sono funzioni di x', y', z', t' . Mettendo x_1, x_2, x_3, x_4 invece di x', y', z', t' e scrivendo di nuovo ds invece di ds' , le equazioni del movimento del punto materiale in riferimento a K' acquisiscono così la forma

$$\begin{cases} \delta \left\{ \int ds \right\} = 0 , \text{ dove} \\ ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu . \end{cases} \quad (1'')$$

Arriviamo così all'interpretazione per cui, nel caso generale, il campo gravitazionale è caratterizzato da dieci funzioni dello spazio e del tempo:

$$\begin{array}{cccc} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{array} \quad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})$$

che nel caso della usuale teoria della relatività si riducono a

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{array}$$

dove c è costante. Lo stesso tipo di degenerazione si manifesta nel caso del campo gravitazionale statico del tipo trattato precedentemente, solo che in questo caso $g_{44} = c^2$ è una funzione di x_1, x_2, x_3 .

La funzione Hamiltoniana H ha perciò nel caso generale il valore

$$H = -m \frac{ds}{dt} = -m \sqrt{g_{11}\dot{x}_1^2 + \dots + 2g_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dots + 2g_{14}\dot{x}_1 + \dots + g_{44}} \quad (5)$$

Le corrispondenti equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

danno subito l'espressione per l'impulso J del punto e per la forza $\mathfrak{K}$ esercitata su di esso dal campo gravitazionale:

$$J_x = -m \frac{g_{11}\dot{x}_1 + g_{12}\dot{x}_2 + g_{13}\dot{x}_3 + g_{14}}{\frac{ds}{dt}} = -m \frac{g_{11}dx_1 + g_{12}dx_2 + g_{13}dx_3 + g_{14}dx_4}{ds} \quad (7)$$

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{1}{2}m \frac{\sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1} dx_\mu dx_\nu}{ds \cdot dt} = -\frac{1}{2}m \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{dt}. \quad (8)$$

Si ottiene inoltre per l'energia E del punto

$$-E = -\left(\dot{x} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} + \dots \right) + H = -m \left(g_{41} \frac{dx_1}{ds} + g_{42} \frac{dx_2}{ds} + g_{43} \frac{dx_3}{ds} + g_{44} \frac{dx_4}{ds} \right). \quad (9)$$

Nel caso della usuale teoria della relatività sono permesse solamente sostituzioni ortogonali lineari. Verrà mostrato che per l'influsso del campo gravitazionale sui processi materiali siamo in grado di montare delle equazioni che si mantengono covarianti rispetto a sostituzioni arbitrarie.

Per prima cosa possiamo trarre la conclusione, dal ruolo che ds svolge nella legge del movimento del punto materiale, che ds deve essere un invariante assoluto (uno scalare); da qui risulta che le grandezze $g_{\mu\nu}$ formano un tensore covariante di secondo rango⁶), che chiamiamo tensore covariante fondamentale. Questo determina il campo gravitazionale. Si ottiene inoltre dalle (7) e (9) che l'impulso e l'energia del punto materiale formano insieme un tensore covariante del primo rango, cioè un vettore covariante.

⁶Si vede la parte II, § 1.

§ 3. Significato del tensore fondamentale degli $g_{\mu\nu}$ per la misurazione dello spazio e del tempo.

Da quanto visto anteriormente si può già desumere che tra le coordinate spazio-temporali x_1, x_2, x_3, x_4 e i risultati delle misurazioni da ottenersi per mezzo di righelli ed orologi non può sussistere nessuna relazione così semplice come nella vecchia teoria della relatività. Si ottenne ciò riguardo al tempo già nel caso del campo gravitazionale statico.⁷⁾ Sorge quindi la questione sul significato fisico (e sulla misurabilità, in principio) delle coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 .

Oltre a ciò notiamo che ds deve essere interpretato come la misura invariante per la distanza tra due punti dello spazio-tempo infinitamente vicini. Perciò deve spettare a ds anche un significato fisico indipendente dal sistema di riferimento scelto. Assumiamo che ds sia la distanza “misurata naturalmente” tra i due punti dello spazio-tempo e vogliamo, sotto questa ipotesi, capire quanto segue.

La vicinanza immediata del punto (x_1, x_2, x_3, x_4) viene determinata rispetto al sistema di coordinate attraverso le variabili infinitesimali dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 . Pensiamo invece di queste a delle nuove variabili $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3, d\xi_4$ introdotte attraverso una trasformazione lineare in modo tale che sia:

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2 .$$

In queste trasformazioni i $g_{\mu\nu}$ sono da considerarsi costanti; il cono reale $ds^2 = 0$ appare riferito ai suoi assi principali. In questo sistema $d\xi$ elementare vale quindi la usuale teoria della relatività, e in questo sistema l'interpretazione fisica di lunghezze e tempi sono le stesse, ovvero ds^2 è il quadrato della distanza quadridimensionale di due punti spazio-temporali infinitamente vicini, misurato per mezzo di un corpo rigido che nel sistema ds non stia accelerando e per mezzo di unità di misura e orologi predisposti in riposo relativamente a quello.

Si vede quindi che per dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 dati la distanza naturale corrispondente a questi differenziali può essere ottenuta solamente se le quantità $g_{\mu\nu}$ che determinano il campo gravitazionale sono conosciute. Si può esprimere ciò anche come segue: il campo gravitazionale influisce in un qualche modo sui corpi che usiamo per effettuare misurazioni.

Dall'equazione fondamentale:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu ,$$

si vede che per la determinazione delle dimensioni fisiche delle quantità $g_{\mu\nu}$ e x_ν c'è bisogno di una ulteriore imposizione. Alla grandezza ds corrisponde la dimensione di una lunghezza. Vogliamo considerare le x_ν anche come lunghezze (anche x_4), quindi alle grandezze $g_{\mu\nu}$ non attribuiamo nessuna dimensione fisica.

⁷⁾Si veda, ad esempio, A. Einstein, Ann. d. Phys. 4. 35. pag. 903ff.

§ 4. Movimento di masse distribuite in maniera incoerente e continua in un campo gravitazionale arbitrario.

Per la derivazione della legge del movimento di masse incoerenti distribuite in maniera continua⁸ calcoliamo l'impulso e la forza ponderomotrice per unità di volume e applichiamo quindi la legge dell'impulso.

Per fare ciò dobbiamo prima calcolare il volume tridimensionale V del nostro punto massivo. Consideriamo un pezzo infinitamente piccolo (quadridimensionale) della linea di universo del nostro punto materiale. il suo volume è

$$\int \int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = V dt .$$

Se introduciamo invece dei dx il differenziale naturale ds , per cui il corpo che usiamo per misurare viene preso come in quiete rispetto al punto materiale, dobbiamo dunque porre

$$\int \int \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = V_0 ,$$

cioè uguale al “volume di riposo” del punto materiale. Inoltre abbiamo

$$\int d\xi_4 = ds ,$$

dove ds ha lo stesso significato di sopra (NdT, probabilmente è s qui e non ds . O non c'è il simbolo di integrale.)

Essendo i dx legati ai $d\xi$ attraverso la sostituzione

$$dx_\mu = \sum_{\sigma} \alpha_{\mu\sigma} d\xi_\sigma ,$$

si ha dunque

$$\int \int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int \int \int \int \frac{\partial(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)}{\partial(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3, d\xi_4)} \cdot d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 ,$$

oppure

$$V dt = V_0 ds \cdot |\alpha_{\varrho\sigma}| .$$

Siccome però si ha che

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} g_{\mu\nu} \alpha_{\mu\varrho} \alpha_{\nu\sigma} d\xi_\varrho d\xi_\sigma = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2 ,$$

allora tra il determinante

$$g = |g_{\mu\nu}| ,$$

⁸NdT. Ovvero una distribuzione continua di materia ma con densità non costante, per cui la massa dev'essere calcolata come l'integrale di volume della densità.

cioè il discriminante della forma differenziale quadratica ds^2 , e il determinante della sostituzione $|\alpha_{\varrho\sigma}|$ sussiste la relazione

$$g \cdot (|\alpha_{\varrho\sigma}|)^2 = -1 .$$

$$|\alpha_{\varrho\sigma}| = \frac{1}{\sqrt{-g}} .$$

Si ottiene quindi per V la relazione

$$V dt = V_0 ds \cdot \frac{1}{\sqrt{-g}} .$$

Da qui si ottiene, con l'aiuto delle (7), (8) e (9), se si sostituisce m/V_0 con ϱ_0 ,

$$\begin{aligned} \frac{J_z}{V} &= -\varrho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_{\nu} g_{1\nu} \frac{dx_{\nu}}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds} , \\ -\frac{E}{V} &= -\varrho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_{\nu} g_{4\nu} \frac{dx_{\nu}}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds} , \\ \frac{\mathfrak{K}}{V} &= -\frac{1}{2} \varrho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_{\nu}}{ds} \cdot \frac{dx_{\nu}}{ds} , \end{aligned}$$

Notiamo che

$$\Theta_{\mu\nu} = \varrho_0 \cdot \frac{dx_{\nu}}{ds} \cdot \frac{dx_{\nu}}{ds}$$

è un tensore controvariante del secondo rango rispetto a sostituzioni arbitrarie. Si sospetta da quanto visto sopra che la legge dell'energia e dell'impulso avrà la forma:

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} \Theta_{\mu\nu} = 0 . \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4) \quad (10)$$

Le prime tre di queste equazioni ($\sigma = 1, 2, 3$) esprimono la legge del momento, mentre la quarta ($\sigma = 4$) la legge dell'energia. Infatti si dimostra che queste equazioni sono covarianti rispetto a sostituzioni arbitrarie.⁹ Inoltre, le equazioni del movimento del punto materiale dalle quali siamo partiti si possono riottenere da queste equazioni attraverso una integrazione sulla linea di flusso.

Chiamiamo il tensore $\Theta_{\mu\nu}$ tensore (controvariante) della tensione-energia della corrente materiale. Ascriviamo all'equazione (10) una regione di validità che copre anche il caso speciale di corrente di masse incoerenti. L'equazione rappresenta in forma generale il bilancio di energia tra il campo gravitazionale e un arbitrario processo materiale; bisogna solo impiegare ogni volta per $\Theta_{\mu\nu}$ quello corrispondente al sistema materiale considerato. La prima somma nell'equazione contiene la derivazione spaziale della densità di tensione o di energia e la derivata temporale della densità di impulso o di energia; la seconda somma è una espressione per gli effetti che vengono trasmessi dal campo gravitazionale al processo materiale.

⁹Si veda la parte II, § 4, Nr. 1.

§ 5. Le equazioni differenziali del campo gravitazionale.

Dopo aver stabilito l'equazione momento-energia per i processi materiali (meccanici, elettrici e altri processi) con riferimento al campo gravitazionale, ci rimane ancora il seguente compito. Sia dato il tensore $\Theta_{\mu\nu}$ per il processo materiale. Quali sono le equazioni differenziali che permettono di determinare le quantità g_{ik} , cioè il campo gravitazionale? In altre parole, stiamo cercando la generalizzazione dell'equazione di Poisson

$$\Delta\varphi = 4\pi k\rho .$$

Non abbiamo trovato un metodo così completamente inevitabile per risolvere questo problema come per risolvere il problema discusso sopra. È stato necessario introdurre alcune ipotesi, la cui correttezza appare plausibile, ma non è evidente.

La generalizzazione cercata sarà ben della forma

$$\kappa \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu} , \quad (11)$$

dove κ è una costante, $\Gamma_{\mu\nu}$ è un tensore controvariante di secondo rango, che si ottiene dal tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$ mediante operazioni differenziali. Per corrispondere alla legge di Newton-Poisson si è propensi a richiedere che queste equazioni (11) debbano essere del secondo ordine. Va sottolineato, tuttavia, che sotto questa ipotesi risulta impossibile trovare un'espressione differenziale $\Gamma_{\mu\nu}$ che sia una generalizzazione di $\Delta\varphi$ e che risulti essere un tensore in relazione a trasformazioni arbitrarie.¹⁰ A priori non può però messo fuori discussione che le equazioni finali esatte della gravità potrebbero essere di ordine superiore al secondo. C'è quindi ancora la possibilità che le equazioni differenziali completamente esatte della gravità potrebbero essere covarianti rispetto a sostituzioni arbitrarie. Tuttavia, dato lo stato attuale delle nostre conoscenze sulle proprietà fisiche del campo gravitazionale, sarebbe prematuro tentare una discussione di tali possibilità. Ecco perché dobbiamo limitarci al secondo ordine e dobbiamo quindi astenerci dal fissare equazioni della gravità che risultino covarianti rispetto a trasformazioni arbitrarie. Per inciso, va sottolineato che non abbiamo alcun indizio di una covarianza generale delle equazioni gravitazionali.¹¹

Lo scalare laplaciano $\Delta\varphi$ risulta dallo scalare φ formando da esso l'espansione (il gradiente) e quindi da questo l'operatore interno (la divergenza). Entrambe le operazioni possono essere generalizzate in modo tale da poter essere eseguite su qualsiasi tensore di rango arbitrariamente alto, ammettendo arbitrarie sostituzioni delle variabili di base.¹² Ma queste operazioni degenerano se eseguite sul tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$.¹³ Sembra che ne emerga che le equazioni cercate saranno covarianti solo rispetto a un certo gruppo di trasformazioni, il quale però ci è al momento sconosciuto.

¹⁰Si veda la parte II, § 4, numero 2.

¹¹Si veda ancora in aggiunta a ciò le riflessioni date all'inizio del § 6.

¹²Parte II, § 2.

¹³Si veda l'annotazione a pagina 28 nella parte II, § 2.

Con questo stato di cose sembra naturale, rispetto alla vecchia teoria della relatività, supporre che le trasformazioni lineari siano contenute nel gruppo di trasformazione cercato. Quindi chiediamo che $\Gamma_{\mu\nu}$ sia un tensore rispetto a trasformazioni lineari arbitrarie.

Si dimostra ora facilmente (eseguendo la trasformazione) i seguenti teoremi:

1. Se $\Theta_{\alpha\beta\dots\lambda}$ è un tensore controvariante di rango n rispetto alle trasformazioni lineari, allora

$$\sum_{\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\dots\lambda}}{\partial x_{\mu}}$$

è un tensore controvariante di rango $n + 1$ rispetto alle trasformazioni lineari (estensione).¹⁴

2. Se $\Theta_{\alpha\beta\dots\lambda}$ è un tensore controvariante di rango n rispetto alle trasformazioni lineari, allora

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\dots\lambda}}{\partial x_{\lambda}}$$

è un tensore controvariante di rango $n - 1$ rispetto alle trasformazioni lineari (divergenza).

Se si eseguono queste due operazioni su un tensore una dopo l'altra, si ottiene un tensore che a sua volta è dello stesso rango dell'originale (operazione Δ , eseguita su un tensore). Per il tensore fondamentale $g_{\mu\nu}$ si ottiene

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}} \right), \quad (a)$$

Che questo operatore sia correlato all'operatore di Laplace si può vedere anche dalla seguente considerazione. Nella teoria della relatività (assenza del campo gravitazionale), si dovrebbe porre

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = c^2, \quad g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{per } \mu \neq \nu,$$

dunque

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -1, \quad \gamma_{44} = \frac{1}{c^2}, \quad \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad \text{per } \mu \neq \nu,$$

Dato un campo gravitazionale che sia sufficientemente debole, allora i $g_{\mu\nu}$ e i $\gamma_{\mu\nu}$ differiscono solo infinitamente poco dai valori appena dati, e così ottiene al posto dell'espressione (a), trascurando i termini di secondo grado

$$- \left(\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_4^2} \right).$$

Se il campo è statico e solo g_{44} variabile, allora arriviamo al caso della teoria della gravità di Newton, se impostiamo l'espressione costruita, a meno di una costante, per la quantità $\Gamma_{\mu\nu}$.

¹⁴ $\gamma_{\mu\nu}$ è il tensore controvariante reciproco a $g_{\mu\nu}$ (parte II, § 1).

Si potrebbe quindi pensare che l'espressione (a) debba essere già la ricercata generalizzazione di $\Delta\varphi$ a meno di un fattore costante. Ma questo sarebbe un errore; perché oltre a quell'espressione potrebbero ancora comparire in tale generalizzazione quei termini che sono essi stessi tensori e scompaiono quando si compie l'approssimazione appena introdotta. Ciò si verifica sempre quando due derivate prime di $g_{\mu\nu}$ o $\gamma_{\mu\nu}$ appaiono moltiplicate tra loro. Così, per esempio,

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} ,$$

è un tensore covariante di secondo rango (rispetto a trasformazioni lineari); lo stesso diventa un infinitesimo del secondo ordine se le quantità $g_{\alpha\beta}$ e $\gamma_{\alpha\beta}$ si discostano da costanti solo per infinitesimi del primo ordine. Bisogna quindi permettere che in $\Gamma_{\mu\nu}$ compaiano altri termini oltre ad (a) che per il momento devono solo soddisfare la condizione che nell'insieme devono possedere carattere tensoriale rispetto a trasformazioni lineari.

Praga, febbraio 1912.

(Ricevuto il 26 febbraio 1912.)