

4. Sobre a influência da força de gravidade sobre o espalhamento da luz;*

por A. Einstein.

Já tentei responder à questão da possibilidade que a difusão da luz seja afetada pela gravidade em um tratado publicado há três anos.¹⁾ Volto a esse tema porque minha interpretação do fenômeno na época não me satisfaz, mas ainda mais porque agora reconheço que uma das consequências mais importantes daquele estudo está acessível para prova experimental. De fato, de acordo com a teoria que será formulada, parece que os raios de luz que passam nas proximidades do Sol experimentam um desvio provocado pelo campo gravitacional do mesmo, de modo que há um aparente aumento na distância angular do Sol de quase um segundo de arco para uma estrela fixa que aparece nas proximidades deste.

Durante o desenvolvimento das reflexões também surgiram outros resultados relacionados com a gravidade. No entanto, como a apresentação do estudo se tornaria um pouco confusa, apenas algumas reflexões completamente elementares serão dadas a seguir, a partir das quais é possível facilmente orientar-se sobre os pressupostos e raciocínios da teoria. As relações derivadas aqui são válidas apenas como uma primeira aproximação, mesmo assumindo que a base teórica esteja correta.

§ 1. Hipótese sobre a natureza física do campo gravitacional.

Em um campo gravitacional homogêneo (com aceleração gravitacional γ) existe um sistema de coordenadas K em repouso que é orientado de tal forma que as linhas de força do campo gravitacional correm na direção negativa do eixo z . Em um espaço onde os campos gravitacionais estão ausentes, existe um segundo sistema de coordenadas K' que realiza um movimento uniformemente acelerado (com aceleração γ) na direção positiva de seu eixo z . Para não complicar desnecessariamente a discussão, por enquanto vamos negligenciar a teoria da relatividade e, portanto, tratar tanto os sistemas quanto os estados de movimento nos quais eles são encontrados de acordo com a cinemática e a mecânica usuais.

Em relação a K , bem como em relação a K' , os pontos materiais, os quais não estão sujeitos à ação de outros pontos materiais, se movem de acordo com as

*Título original: *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*. Publicado em: *Annalen der Physik* **35** (1911): 898–908. Traduzido por Oliver F. Piattella.

¹A. Einstein, *Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik* IV. 4.

equações:

$$\frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} = -\gamma.$$

Isso segue, para o sistema acelerado K' , do princípio de Galileu, mas para o sistema K em repouso em um campo gravitacional homogêneo, isso decorre da experiência de que todos os corpos são acelerados da mesma maneira e com a mesma intensidade. Esta experiência da queda livre idêntica para todos os corpos em um campo gravitacional é uma das mais gerais que a natureza nos deu; no entanto, essa lei não recebeu nenhum lugar nos fundamentos de nossa descrição física do universo. No entanto, chegamos a uma interpretação muito satisfatória do princípio empírico se assumirmos que os sistemas K e K' sejam exatamente equivalentes, ou seja, se assumirmos que K também pode ser adotado da mesma forma que um sistema encontrado no espaço sem campo gravitacional; para isso, entretanto, devemos considerar K como uniformemente acelerado. No contexto desta interpretação não podemos falar de *aceleração absoluta* do sistema de referência, assim como na teoria da relatividade usual não podemos falar de *velocidade absoluta* do sistema.²⁾ Nessa interpretação, a queda livre idêntica para todos os corpos é evidente.

Enquanto nos limitarmos a processos puramente mecânicos no regime de validade da mecânica newtoniana, temos certeza da equivalência entre K e K' . No entanto, nossa interpretação terá um significado mais profundo se os sistemas K e K' forem equivalentes em relação a todos os processos físicos, ou seja, quando as leis da natureza expressas em K coincidirem completamente com aquelas expressas em K' . Se hipotetizarmos isso, obteremos um princípio que, se verdadeiramente válido, tem um grande significado heurístico. De fato, a partir da observação teórica dos processos que ocorrem em um sistema de referência uniformemente acelerado, obtemos conclusões sobre o desenvolvimento dos fenômenos em um campo gravitacional homogêneo.³⁾ A seguir, será mostrado primeiro o quanto nossa hipótese tem uma probabilidade considerável de ser verdadeira, do ponto de vista da teoria da relatividade usual.

§ 2. Sobre o peso da energia.

A teoria da relatividade implica que a massa inercial de um corpo cresce com o conteúdo energético do mesmo; se o aumento de energia atingir E , então o aumento da massa inercial é E/c^2 , onde c representa a velocidade da luz. Mas agora, esse aumento na massa inercial corresponde a um aumento na massa gravitante? Do contrário, um corpo cairia no mesmo campo gravitacional com acelerações diferentes dependendo de seu conteúdo de energia. O resultado satisfatório da teoria da relatividade, segundo a qual a lei da conservação da massa é incorporada à lei da conservação da energia, não seria obtido diretamente; pois assim teríamos que

²Claro que não podemos substituir um campo gravitacional *arbitrário* por um estado de movimento de um sistema na ausência de um campo gravitacional, assim como não podemos trazer todos os pontos de um meio em movimento arbitrário para repouso com uma transformação relativística.

³Em uma discussão subsequente, será mostrado que o campo gravitacional considerado aqui é homogêneo apenas em uma primeira aproximação.

abandonar a lei de conservação da massa em sua formulação antiga certamente para a massa *inercial*, mas ela teria que ser mantida diretamente para a gravitacional.

Isso deve ser considerado muito improvável. Por outro lado, a teoria da relatividade usual não nos fornece nenhum argumento a partir do qual possamos concluir que o peso de um corpo depende de seu conteúdo energético. Porém, mostraremos que nossa hipótese de equivalência dos sistemas K e K' tem o peso da energia como consequência necessária.

Considere dois sistemas (corpos) S_1 e S_2 no eixo z de K separados por uma distância h e ambos equipados com dispositivos de medição⁴), de tal forma que o potencial gravitacional em S_2 seja maior que γh do que em S_1 .

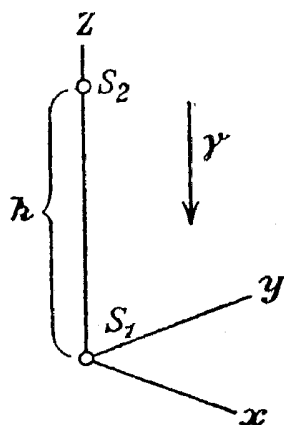


Fig 1.

Uma certa quantidade de E energia é enviada de S_2 a S_1 na forma de radiação. As quantidades de energia podem ser medidas em S_1 e S_2 com aparelhos que — se trazidos para *um* ponto z do sistema e lá comparados — são completamente idênticos. Em princípio, nada pode ser dito sobre o processo dessa transferência de energia por meio da radiação, pois não sabemos a influência do campo gravitacional na radiação e nos instrumentos de medição em S_1 e S_2 .

De acordo com nossa suposição de equivalência de K e K' , podemos, em vez do sistema K encontrado no campo gravitacional homogêneo, usar o sistema K' em gravidade zero e em movimento acelerado uniforme na direção positiva do eixo z , ao qual os corpos S_1 e S_2 estão fixados solidamente.

Avaliamos o processo de transferência de energia por meio de radiação de S_2 a S_1 a partir de um sistema K_0 , não em aceleração. Comparado com K_0 , K' tem velocidade zero no instante em que a energia de radiação E_2 é enviada de S_2 para S_1 . A radiação será recebida em S_1 quando o tempo h/c (primeira aproximação) tiver decorrido. Neste momento, no entanto, S_1 tem, em comparação com K_0 , velocidade $\gamma h/c = v$. Portanto, de acordo com a teoria da relatividade usual, a radiação que chega em S_1 não tem energia E_2 , mas uma energia maior que está

⁴ S_1 e S_2 devem ser considerados infinitamente menores do que h .

relacionada a E_2 na primeira aproximação pela equação⁵):

$$E_1 = E_2 \left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_2 \left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right). \quad (1)$$

De acordo com nossa hipótese, a mesma relação se mantém exatamente se o mesmo processo ocorrer no sistema K não acelerado, mas provido de um campo gravitacional. Neste caso, podemos substituir γh pelo potencial Φ da força gravitacional em S_2 , se a constante arbitrária de Φ em S_1 for igual a zero. Portanto, a equação válida è:

$$E_1 = E_2 + \frac{E_2}{c^2} \Phi. \quad (1a)$$

Esta equação estabelece a lei da energia para o processo em consideração. A energia E_1 chegando a S_1 é maior que a energia E_2 , medida da mesma forma, que foi emitida em S_2 , e justamente a energia potencial da massa E_2/c^2 no campo gravitacional. Vê-se, portanto, que, para que o princípio da energia seja satisfeito, à energia E antes de sua emissão em S_2 deve ser atribuída uma energia potencial gravitacional, que corresponde à da massa E/c^2 . Nossa hipótese de equivalência de K e K' remove assim a dificuldade descrita no início deste parágrafo, que a teoria da relatividade usual deixa sem explicação.

O sentido desse resultado é particularmente significativo considerando o processo cíclico seguinte:

1. A energia E (medida em S_2) é enviada na forma de radiação de S_2 a S_1 onde, de acordo com o resultado acabado de obter, a energia registrada é $E(1 + \gamma h/c^2)$ (medida em S_1).
2. Um corpo W de massa (gravitacional, NdT) M é deixado cair de S_2 para S_1 , para o qual é liberado um trabalho $M\gamma h$.
3. A energia E é transferida de S_1 para o corpo W enquanto ele se encontra em S_1 . Então a massa gravitacional M muda, adquirindo o valor M' .
4. Iça-se W novamente para S_2 , então precisa utilizar o trabalho $M'\gamma h$.
5. E é transferido de W de volta para S_2 .

O efeito deste processo cíclico consiste apenas no fato de que S_1 sofreu um aumento de energia $E(\gamma h/c^2)$ e que foi fornecida ao sistema a quantidade de energia

$$M'\gamma h - M\gamma h$$

na forma de trabalho mecânico. De acordo com o princípio da energia, deve-se ter

$$E \frac{\gamma h}{c^2} = M'\gamma h - M\gamma h$$

ou

$$M' - M = \frac{E}{c^2}. \quad (1b)$$

⁵A. Einstein, ann. d. Phys. **17**. p. 903 u. 914. 1905.

O aumento da massa *gravitacional* é portanto igual a E/c^2 , portanto igual ao da massa *inercial* resultante da teoria da relatividade.

Ainda mais facilmente obtemos da equivalência dos sistemas K e K' o resultado para o qual a massa *gravitacional* em relação a K é completamente igual à massa *inercial* em relação a K' ; portanto a energia deve ter uma massa *gravitacional* igual à sua massa *inercial*. Se, no sistema K' , uma massa M_0 está ligada a uma balança de mola, esta mostrará, devido à inércia de M_0 , o peso aparente $M_0\gamma$. Ao transferir a quantidade de energia E para M_0 , a balança da mola mostrará $(M_0 + \frac{E}{c^2})\gamma$, de acordo com a lei da inércia da energia. De acordo com nossa hipótese fundamental, o mesmo deve acontecer repetindo o experimento no sistema K , ou seja, na presença de um campo gravitacional.

§ 3. Tempo e velocidade da luz no campo gravitacional.

Se a radiação emitida a partir de S_2 para S_1 no sistema K' em aceleração uniforme possuía frequência ν_2 , em comparação com um relógio localizado em S_2 , então ela, em comparação com um relógio localizado em S_1 , não possui mais frequência ν_2 do que S_1 , quando chega em S_1 , mas uma frequência maior ν_1 , tal que uma primeira aproximação

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\gamma h}{c^2} \right). \quad (2)$$

De fato, ao introduzir novamente o sistema de referência não acelerado K_0 , em relação ao qual o sistema K' possui velocidade zero no instante da emissão de luz, então S_1 possui em relação a K_0 velocidade $\gamma(h/c)$ no momento da chegada da radiação em S_1 , para o qual a relação dada é obtida imediatamente, em virtude do princípio Doppler.

De acordo com nossa suposição de equivalência dos sistemas K e K' , esta equação também é válida para o sistema de coordenadas K em repouso, fornecido com um campo gravitacional uniforme, quando ocorre a troca de radiação aqui descrita. Parece, portanto, que para um raio de luz emitido em S_2 na presença de um certo potencial gravitacional, que no momento da emissão — comparado a um relógio localizado em S_2 — tem frequência ν_2 , quando chegar em S_1 terá outra frequência ν_1 , se esta for medida em S_1 com um relógio exatamente idêntico ao primeiro. Substituímos γh pelo potencial gravitacional Φ em S_2 , que tem seu zero em S_1 e assumimos que a relação que derivamos para o caso de um campo gravitacional *homogêneo* também se mantém para outros tipos de campos; nós temos, portanto

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right). \quad (2a)$$

Este resultado (válido como uma primeira aproximação, de acordo com nossa derivação) permite, em primeiro lugar, a aplicação seguinte. Seja ν_0 a frequência de uma fonte de luz elementar, medida com um relógio U na mesma posição. Esta frequência é, portanto, independente de onde ela é colocada junto com o relógio. Queremos pensar ambos colocados, por exemplo, na superfície solar (lá há o nosso

S_2). Da luz ali emitida, uma parte chega à Terra (S_1) onde nós, com um relógio exatamente igual a U , medimos a frequência da luz incidente. Portanto, de acordo com (2a)

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) ,$$

onde Φ representa a diferença de potencial (negativa) entre a superfície do Sol e da Terra. De acordo com nossa interpretação, as linhas espectrais da luz do sol devem, portanto, ser deslocadas um pouco em direção ao vermelho em relação às linhas espectrais correspondentes de uma fonte de luz terrestre, e precisamente pela relativa quantidade:

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{-\Phi}{c^2} = 2 \cdot 10^{-6} .$$

Se as condições sob as quais as linhas espectrais solares são geradas fossem conhecidas com exatidão, essa mudança seria acessível para medição. No entanto, como existem outros fatores (pressão, temperatura) que influenciam a posição das linhas espectrais, é difícil verificar se a influência do campo gravitacional derivado aqui realmente existe.⁶⁾

A partir de uma observação superficial, a equação (2) ou (2a) parecem ser um contra-senso. Como pode uma transferência contínua de luz de S_2 para S_1 ter um número diferente de oscilações por segundo em S_1 do que aquele emitido em S_2 ? A resposta, entretanto, é simples. Não podemos interpretar ν_2 ou ν_1 simplesmente como frequências (número de oscilações por segundo), pois ainda não estabelecemos um tempo no sistema K . ν_2 representa o número de oscilações em relação à unidade de tempo do relógio U em S_2 , enquanto ν_1 o número de oscilações em relação à unidade de tempo do relógio idêntico em S_1 . Nada nos obriga a supor que relógios U que estão em diferentes potenciais gravitacionais devam ser considerados batendo o tempo igualmente. Pelo contrário, devemos definir o tempo em K de forma segura, de forma que o número de picos e vales da onda entre S_2 e S_1 seja independente do valor absoluto do tempo; isso ocorre porque o processo considerado é, por sua própria natureza, estacionário. Se não satisfizéssemos essa condição, chegaríamos a uma definição de tempo que, quando usada, entraria explicitamente nas leis da natureza, o que certamente seria antinatural e inadequado. Os relógios em S_1 e S_2 , portanto, não fornecem a "tempo" corretamente. Se medirmos o tempo em S_1 com o relógio U , *então devemos medir o tempo em S_2 com um relógio rodando mais lento do que U por um fator $1 + \Phi/c^2$, quando comparado com U na mesma posição.* Assim, a frequência do feixe de luz considerado acima medido com tal relógio no momento de sua emissão em S_2 seria

$$\nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) ,$$

e portanto de acordo com (2a) igual à frequência ν_1 do mesmo raio de luz quando chega em S_1 .

⁶L. F. Jewell (Journ. de phys. **6**. p. 84. 1897) e em particular Ch. Fabry e H. Boisson (Compt. rend. **148**. p. 688 – 690. 1909) na verdade, eles encontraram esse desvio para o vermelho das linhas espectrais da ordem de magnitude calculada aqui, mas atribuíram isso a um efeito da pressão na camada absorvente.

Daqui obtemos uma consequência de fundamental importância para esta teoria. De fato, ao medir a velocidade da luz no sistema acelerado K' na ausência de um campo gravitacional em diferentes posições usando relógios U idênticos, o mesmo valor é obtido em toda parte. O mesmo é válido, de acordo com nossa hipótese fundamental, também para o sistema K . De acordo com o que foi dito, entretanto, devemos usar relógios de tipo diferente para medir o tempo em posições de diferente potencial gravitacional. Temos que utilizar para medir o tempo em uma posição que tenha o potencial gravitacional Φ em comparação à origem das coordenadas, um relógio que — se movido para a origem das coordenadas — roda mais devagar que $(1 + \Phi/c^2)$ do que o que é usado para medir o tempo na origem das coordenadas. Chamando c_0 a velocidade da luz na origem das coordenadas, então a velocidade da luz c em uma posição de potencial gravitacional Φ será dada pela relação

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) . \quad (3)$$

O princípio da constância da velocidade da luz não é válido nesta teoria da mesma forma que constitui a base da teoria da relatividade usual.

§ 4. A deflexão dos raios de luz em um campo gravitacional.

A partir da afirmação mostrada acima de que a velocidade da luz em um campo gravitacional é uma função da posição, pode-se facilmente concluir, usando o princípio de Huygens, que os raios de luz que se propagam através de um campo gravitacional devem sofrer deflexão. Na verdade, seja ε uma frente de onda plana no tempo t , P_1 e P_2 dois de seus pontos, separados por uma distância 1. P_1 e P_2 estão no plano da página, que é escolhido de forma que a derivada direcional de Φ ao longo de sua normal (e portanto também a de c) seja zero.⁷ Obtemos no plano da página a frente da onda, ou parte dela, correspondente ao tempo $t + dt$ traçando a tangente aos círculos centrados em P_1 e P_2 e com raios, respectivamente, $c_1 dt$ e $c_2 dt$, onde c_1 e c_2 são a velocidade da luz em P_1 e P_2 , respectivamente. O ângulo de deflexão do raio de luz em um caminho $c dt$ é, portanto,

$$\frac{(c_1 - c_2)dt}{1} = -\frac{\partial c}{\partial n'} dt ,$$

se calcularmos o ângulo de deflexão positivamente, quando o raio de luz for desviado na direção do n' positivo.

O ângulo de deflexão por unidade de caminho percorrido pelo raio de luz é, portanto:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial n'}$$

ou, de acordo com (3)

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} .$$

⁷NdT. Para simplificar eu acho graficamente, dada a figura a seguir), Einstein está assumindo que o potencial gravitacional varia apenas no plano da página.

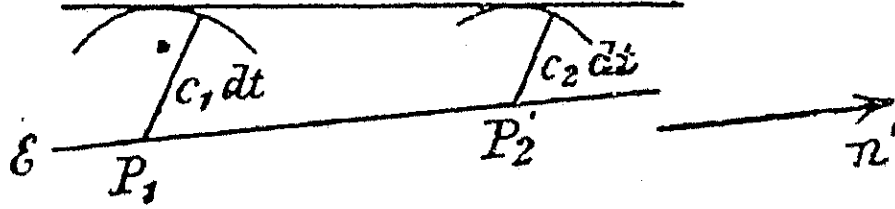


Fig. 2.

Finalmente obtemos para o desvio α sofrido por um raio de luz em direção a n' ao longo de um caminho arbitrário (s) a expressão

$$\alpha = -\frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds . \quad (4)$$

Poderíamos ter obtido o mesmo resultado da observação imediata da propagação de um raio de luz no sistema uniformemente acelerado K' e da transposição do resultado para o sistema K , e daqui para o caso em que o campo gravitacional seja arbitrário.

De acordo com a equação (4), um raio de luz que passa próximo a um corpo celeste sofre um desvio na direção em que o potencial gravitacional diminui, portanto na direção do corpo celeste, pela magnitude

$$\alpha = \frac{1}{c^2} \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=+\frac{\pi}{2}} \frac{kM}{r^2} \cos \vartheta \cdot ds = \frac{2kM}{c^2 \Delta} ,$$

onde k é a constante gravitacional, M a massa do corpo celeste, Δ a distância do raio de luz ao ponto central do corpo celeste. *Um raio de luz que passa perto do Sol, portanto, sofre um desvio de $4 \cdot 10^{-6} = 0,83$ segundos de arco.* A distância angular das estrelas ao ponto central do Sol parece ter aumentado nessa quantidade, devido à deflexão dos raios de luz. Como as estrelas fixas que estão na direção do Sol se tornam visíveis durante um eclipse total, essa consequência da teoria pode ser comparada à observação. Para o planeta Júpiter, o desvio esperado atinge cerca de 1/100 do valor dado. Deseja-se com urgência que os astrônomos levem em conta a questão aqui desenvolvida, mesmo que as reflexões apresentadas pareçam

insuficientemente fundamentadas ou mesmo aventureiras. Independentemente de qualquer teoria, devemos nos perguntar se com os meios atuais podemos averiguar a influência do campo gravitacional na propagação da luz.

Praga, junho de 1911.

(Recebido em 21 de junho de 1911.)